LAHENDUSED 12.KLASS

1. **Vastus: 1h**

<u>Lahendus:</u>
Tähistagu x (m^2/h) tütre lillede istutamiskiirust ja y (m^2/h) poja lillede istutamiskiirust. Ema lillede istutamiskiirus on siis 2x.

$$x + y \le 2x \text{ kust } y \le x$$

$$\frac{12}{4} = 3 \Rightarrow y \ge 3$$

$$1h\ 20\ min = \frac{4}{3}h$$

$$12 : \frac{4}{3} = 9 \Rightarrow 2x + y \le 9$$

Samas: $y \le x \quad /\cdot 2$

$2y \le 2x$

$2y + y \le 2x + y$

$3y \le 2x + y$

Saame: $3y \le 2x + y \le 9$

$$3y \le 9$$

$$y \le 3$$

$$y \le 3 \text{ ja samal ajal } y \ge 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{y = 3}}$$

$$x \ge y \Rightarrow x \ge 3$$

$$2x + y \le 9$$

$$2x + 3 \le 9$$

$$2x \le 6 \quad /:2$$

$$x \le 3$$

$$x \ge 3 \text{ ja samal ajal } x \le 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{x = 3}}$$

Tütar istutab ühe tunni jooksul lilli $3m^2$, poeg $3m^2$ ja ema $6m^2$.

$$3 + 3 + 6 = 12$$

$\frac{12}{12} = 1$, ehk ühe tunniga saavad lilled istutatud.

Hindamine:

Seose $y \leq x$ leidmine	1 p
Seose $2x + y \leq 9$ leidmine	1p
Leitud, et $y = 3$	2p
Leitud, et $x = 3$	2p
Lõppvastuse leidmine	1 p
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p

2. **Vastus:** $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$

<u>Lahendus :</u>

Lahendus 1:

On näha, et $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ on süsteemi lahendiks, sest

$2^1 \cdot 3^1 = 6$ ja $3^1 \cdot 16^1 = 48$

Näitame, et rohkem lahendeid ei ole.

$$\begin{cases} \log(2^x \cdot 3^y) = \log 6 \\ \log(3^x \cdot 16^y) = \log 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log 2^x + \log 3^y = \log 6 \\ \log 3^x + \log 16^y = \log 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot \log 2 + y \cdot \log 3 = \log 6 \\ x \cdot \log 3 + y \cdot \log 16 = \log 48 \end{cases}$$

Lineaarvõrrandi süsteem.

$$D = \begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 3 & \log 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 3 & 4\log 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \log 2 \cdot 4\log 2 - \log^2 3 = 4\log 2 \cdot \log 2 - \log^2 3 = 2\log 2 \cdot 2\log 2 - \log^2 3 =$$

$$= \log 2^2 \cdot \log 2^2 - \log^2 3 = \log 4 \cdot \log 4 - \log^2 3 = \log^2 4 - \log^2 3 \neq 0$$

Järelikult on võrrandisüsteemil üks lahend

Vastus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Lahendus 2:

$$\begin{cases} \log(2^x \cdot 3^y) = \log 6 \\ \log(3^x \cdot 16^y) = \log 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log 2^x + \log 3^y = \log 6 \\ \log 3^x + \log 16^y = \log 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot \log 2 + y \cdot \log 3 = \log 6 \\ x \cdot \log 3 + y \cdot \log 16 = \log 48 \end{cases}$$

Lineaarvõrrandi süsteem.

$$D = \begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 3 & \log 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 3 & 4\log 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \log 2 \cdot 4\log 2 - \log^2 3 = 4\, log^2 2 - \log^2 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \log 6 & \log 3 \\ \log 48 & 4\log 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 2 + \log 3 & \log 3 \\ \log 3 + \log 16 & 4\log 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log 2 + \log 3 & \log 3 \\ \log 3 + 4\log 2 & 4\log 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\log 2\,(\log 2 + \log 3) - \log 3(\log 3 + 4\log 2) =$$

$$= 4\log^2 2 + 4\log 2 \cdot \log 3 - \log^2 3 - 4\log 2 \cdot \log 3 =$$

$$= 2\log 2 \cdot 2\log 2 - \log^2 3 = 4log^2 2 - log^2 3$$

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{D_x}}{\mathrm{D}}$$

$$\mathrm{x} = \frac{4\log^2 2 - \log^2 3}{4\log^2 2 - \log^2 3} = 1$$

$$\mathrm{D_y} = \begin{vmatrix} \log 2 & \log 2 + \log 3 \\ \log 3 & \log 3 + 4\log 2 \end{vmatrix} = \log 2(\log 3 + 4\log 2) - \log 3(\log 2 + \log 3) =$$

$$= \log 2 \cdot \log 3 + 4\log^2 2 - \log 2 \cdot \log 3 - \log^2 3 =$$

$$= 4\log^2 2 - \log^2 3 = 2\log 2 \cdot 2\log 2 - \log^2 3 = 4log^2 2 - log^2 3$$

$$\mathrm{y} = \frac{\mathrm{D_y}}{\mathrm{D}}$$

$$\mathrm{y} = \frac{4log^2 2 - log^2 3}{4log^2 2 - log^2 3} = 1$$

Vastus: $\begin{cases} \mathrm{x} = 1 \\ \mathrm{y} = 1 \end{cases}$

Hindamine:

Lahendus 1:

Näitamine, et süsteemi üks lahend on $\begin{cases} \mathrm{x} = 1 \\ \mathrm{y} = 1 \end{cases}$	2 p
Lineaarvõrrandi süsteemi saamine	2 p
Näitamine, et rohkem lahendeid ei ole	3p
	7p

Lahendus 2:

Lineaarvõrrandi süsteemi saamine	2 p
x väärtuse leidmine	3p
y väärtuse leidmine	2p
	7p

3.

<u>Lahendus:</u>

$24 = 3 \cdot 8.$

3 ja 8 on ühistegurita arvud.

Järelikult, selleks et tõestada, et $p^2 - 1$ jagub 24-ga peab näitama, et see jagub nii 3-ga, kui ka 8-ga:

Kuna p on algarv, siis 3-ga jagamisel jääb jäägiks 1 või 2.

Näitame, et $p^2 - 1$ jagub kolmega:

Kui $\mathrm{p} = 3\mathrm{k} + 1,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 9\mathrm{k}^2 + 6\mathrm{k} + 1 - 1 = 3(3\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k})$.

Kui $\mathrm{p} = 3\mathrm{k} + 2,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 9\mathrm{k}^2 + 12\mathrm{k} + 4 - 1 = 3(3\mathrm{k}^2 + 4\mathrm{k} + 1)$

Ehk avaldis $p^2 - 1$ jagub kolmega

Kuna p on algarv, siis 8-ga jagamisel jääb jääk 1, 3, 5 või 7. Vastasel juhul p on paarisarv, ehk ei ole algarv.

Näitame, et $p^2 - 1$ jagub 8-ga:

Kui $\mathrm{p} = 8\mathrm{k} + 1,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 64\mathrm{k}^2 + 16\mathrm{k} + 1 - 1 = 8(8\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k})$.

Kui $\mathrm{p} = 8\mathrm{k} + 3,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 64\mathrm{k}^2 + 48\mathrm{k} + 9 - 1 = 8(8\mathrm{k}^2 + 6\mathrm{k} + 1)$.

Kui $\mathrm{p} = 8\mathrm{k} + 5,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 64\mathrm{k}^2 + 80\mathrm{k} + 25 - 1 = 8(8\mathrm{k}^2 + 10\mathrm{k} + 3)$.

Kui $\mathrm{p} = 8\mathrm{k} + 7,$ siis $\mathrm{p}^2 - 1 = 64\mathrm{k}^2 + 112\mathrm{k} + 49 - 1 = 8(8\mathrm{k}^2 + 14\mathrm{k} + 6)$.

Ehk avaldis $p^2 - 1$ jagub 8-ga.

Kuna avaldis $p^2 - 1$ jagub 3-ga ja 8-ga, siis $p^2 - 1$ jagub ka 24-ga.

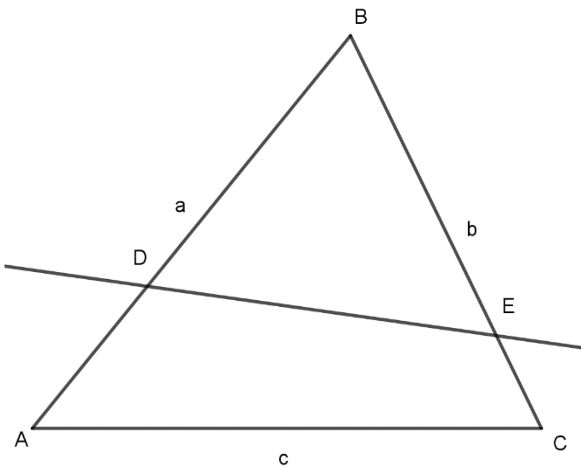
<u>Hindamine:</u>

Märkamine, et tõestamiseks piisab avaldise 3-ga ja 8-ga jaguvuse kontrollimisest	1 p
Näitamine, et avaldis $p^2 - 1$ jagub 3-ga	2 p
Nätamine, et avaldis $p^2 - 1$jagub 3-ga	<u>4 p</u>
	7p

4. Vastus: $BD = \dfrac{\frac{a+b+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{4} - 2ab}}{2}$

<u>Lahendus:</u>

Olgu lõik *BD* tähistatud *x* ja lõik *BE* tähistatud *y*.



$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a+b+c}{2} \\ \dfrac{1}{2}xy \cdot \sin\gamma = \dfrac{1}{4}ab \cdot \sin\gamma \quad / \cdot \dfrac{4}{\sin\gamma} \end{cases}$$

$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

$$\begin{cases} x + y = p \\ 2xy = ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = p - x \\ 2x(p-x) = ab \end{cases}$$

$$2px - 2x^2 = ab$$

$$-2x^2 + 2px - ab = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-ab)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 8ab}}{-4} =$$

$$= \frac{-2p \pm \sqrt{4(p^2 - 2ab)}}{-4} = \frac{-2p \pm 2\sqrt{p^2 - 2ab}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-2p + 2\sqrt{p^2 - 2ab}}{-4} = \frac{-2\left(p - \sqrt{p^2 - 2ab}\right)}{-4} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2ab}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2p - 2\sqrt{p^2 - 2ab}}{-4} = \frac{-2\left(p + \sqrt{p^2 - 2ab}\right)}{-4} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2ab}}{2}$$

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2ab}}{2}$$

$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

Vastus:

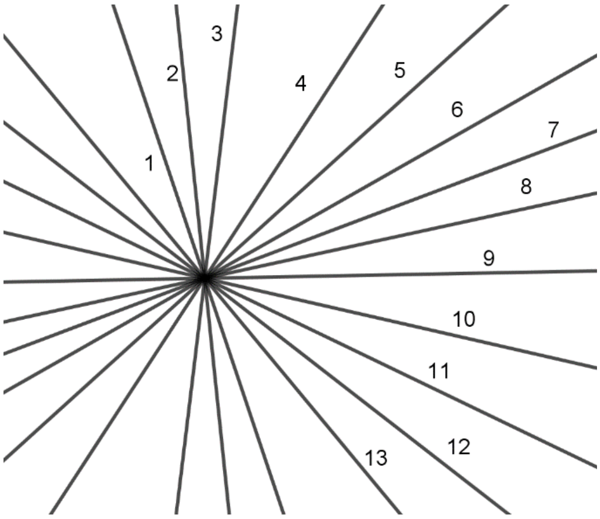
$$BD = \frac{\frac{a+b+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{4} - 2ab}}{2}$$

Hindamine:

Tähistamine ja võrrandisüsteemi saamine	2 p
Ruutvõrrandi saamine	2 p
Ruutvõrrandi lahendite leidmine	2 p
Lõppvastus	1 p
	7p

5.

<u>Lahendus:</u>



Oletame, et väikseim sirgetevaheline nurk on 14°.

Kui kahele sirgele joonestame paralleelsed sirged, siis paralleelsete sirgete vaheline nurk on võrdne esialgsete sirgete vahelise nurgaga. Asendame olemasolevad sirged paralleelsete sirgetega nii, et nad kõik lõikuksid ühes punktis ning nummerdame järjest sirgeid, nagu näidatud joonisel

Oletame, et 1. ja 2. sirgete vahel on nurk 14°. Oletame, et 2. ja 3. sirgete vahel on samuti nurk 14°. Kuna 1. ja 3. sirgete vahel olev nurk ei ole oletuslikult väiksem, kui 14°, siis 1. ja 3. sirgete vahel olev nurk on 28°. Edasi samu samme tehes jõuame, et 12. ja 13. sirgete vahel on nurk samuti 14° ja 1. ja 13. sirgete vahel on nurk $12 \cdot 14° = 168°$.

180° – 168° = 12°, ehk see tähendab, et sellisel juhul on 1. ja 13. sirgete vahel nurk 12°, millest järeldub, et vähemalt kahe sirge vahel olev nurk on alla 14°.

Järelikult ka esialgsete sirgete vaheline nurk on alla 14°, ehk leidub kaks sirget, mille vahel on nurk väiksem, kui 14°.

<u>Hindamine:</u>

Oletamine, et väikseim nurk on 14°	1p
Sirgete paigutamine nii, et kõrvalolevate sirgete vaheline nurk on 14°	1p
Tähele panemine, et kui nii teha, siis esimese ja viimase sirgete vaheline nurk on väiksem, kui 14°	4p
Järeldamine, et leidub 2 sirget, mille vahel on nurk väiksem kui 14°	<u>1p</u>
	7p